المحاضرة 3 — 2020/10/21

8

مثال:
$A = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ ولتكن A مجموعة ثنائية R معرفة بالشكل
R (معرفة)
$(z_1, n_1) R (z_2, n_2) \Leftrightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1$
$(z_1, n_1), (z_2, n_2) \in A$
ادرس خصائص هذه العلاقة

الحل:

1- R انعكاسية ؟
لدينا $z_1 n_1 = n_1 z_1$
ومنه $(z_1, n_1) R (z_1, n_1)$
وبما أن $(z_1, n_1) \in A$
بالعلاقة انعكاسية

2- R تناظرية ؟
$(z_1, n_1) R (z_2, n_2) \Rightarrow z_1 n_2 = n_1 z_2$
$\Rightarrow z_2 n_1 = n_2 z_1$
$\Rightarrow (z_2, n_2) R (z_1, n_1)$
إذاً العلاقة تناظرية

9

3- R متعدية ؟
ليكن $(z_1, n_1) R (z_2, n_2) \wedge (z_2, n_2) R (z_3, n_3) \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{z_1 n_2 = n_1 z_2}$ ① $\wedge$ $\boxed{z_2 n_3 = n_2 z_3}$ ②
نضرب ① بـ n_3 ونضرب ② بـ n_1 ونحصل على
$n_3 z_1 n_2 = n_3 n_1 z_2$ و $n_1 z_2 n_3 = n_1 n_2 z_3$
من * و ** نجد أن:
$n_3 n_2 z_1 = n_1 n_2 z_3$
بالتبسيط على $n_2 \neq 0$ نجد أن
$\Rightarrow z_1 n_3 = n_1 z_3$
حيث
$(z_1, n_1) R (z_3, n_3)$
إذاً R متعدية

4- R تكافئية ؟
$(z_1, n_1) R (z_2, n_2) \wedge (z_2, n_2) R (z_1, n_1) \Rightarrow$
$\Rightarrow (z_1 n_2 = n_1 z_2) \wedge (z_2 n_1 = n_2 z_1)$

10

$\Rightarrow z_1 n_2 = n_1 z_2$
لدينا
$(1, 4) R (3, 12)$
لأن
$(1)(12) = (4)(3)$
و
$(3, 12) R (1, 4)$
لأن $(3)(4) = (12)(1)$
ولكن
$(1, 4) \neq (3, 12)$
إذاً R ليست تكافئية

مثال:
$A = \mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ولتكن A المجموعة
R معرفة بالشكل:
$x R y \Leftrightarrow \sin x + \cos y$
ادرس خصائص هذه العلاقة

مثال:
$A = \mathbb{Z}$: مجموعة الأعداد الصحيحة ولتكن R علاقة ثنائية على A
كما يلي:
$aRb \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{Z} : a - b = 4t$
ادرس خصائص هذه العلاقة:

11

1- R انعكاسية ؟ : مهما يكن $a \in A$ فإن
$a - a = 4(t)$
$aRa \Leftarrow 0 = 4(0)$
$\in \mathbb{Z}$
R انعكاسية

2- R تناظرية ؟
$aRb \rightarrow \exists t \in \mathbb{Z} : a - b = 4t$ *
ومن نظرية ⑥ و 1- نحصل
bRa ومنه $b - a = -4t = 4(-t)$
$\in \mathbb{Z}$
إذاً R تناظرية

3- R متعدية ؟
$aRb \wedge bRa \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists t_1, t_2 \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a - b = 4t_1 \\ b - c = 4t_2 \end{cases}$
بجمع العلاقتين نجد أن
$aRc \Leftarrow a - c = 4(t_1 + t_2)$
$\in \mathbb{Z}$
إذاً R متعدية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

4- R تكافئية ؟

$$a\,R\,b \wedge b\,R\,a \Rightarrow \exists t_1, t_2 \in \mathbb{Z} \begin{cases} a - b = 4t_1 \\ b - a = 4t_2 \end{cases}$$

من الأول نجد أن $a = b + 4t$ بالتعويض في الثانية

$$b - b - 4t_1 = 4t_2 \rightarrow t_1 = -t_2$$

لا يمكن استنتاج $t_1 = t_2 = 0$ لذا في حالة $a = b$

العلاقة ليست تكافئية

مثال معاكس $5 \neq 1 \rightarrow 5\,R\,1$ و $1\,R\,5$

R ليست تكافئية

انتهت المحاضرة